located in the right half-plane. The solution of the problem is obtained by reducing to the corresponding Riemann problem.

Keywords: integral equation, Riemann boundary value problems, periodic arrangement of segments, periodic function, entire function, meromorphic function.

УДК 517.954

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ *B*-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Н.А. Ибрагимова[1], Е.А. Уткина[2]

1 *nai.liya@yandex.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *eutkina1@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассмотрены внутренняя и внешняя задачи Неймана для одного многомерного вырождающегося B-эллиптического уравнения с отрицательным параметром. Методом потенциалов доказана однозначная разрешимость поставленных краевых задач.

Ключевые слова: многомерное вырождающееся B-эллиптическое уравнение с отрицательным параметром, фундаментальное решение, краевая задача Неймана, метод потенциалов.

Пусть $\mathbb{E}_p^{++}$ — часть p-мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно, $C^k_{B^l}(D)$ — множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l \to 0$. Использованы обозначения: $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-2})$ — точки евклидова пространства, $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \overline{D}$.

В настоящей работе для вырождающегося B-эллиптического уравнения

$$M_B[u] = x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

в котором $\Delta_{x'} = \sum\limits_{l=1}^{p-2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, изучены следующие краевые задачи:

Внутренняя краевая задача Неймана. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x) \in C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^2_{B^p}(D) \cap C^1(\overline{D}),$$

$$u(x) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0,$$

$$A[u]\big|_{\Gamma} = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma), \tag{2}$$

где $A[u] = \xi_p^m \sum\limits_{l=1}^{p-1} \cos(n, \xi_l) \frac{\partial u}{\partial \xi_l} + \cos\left(n, \xi_p\right) \frac{\partial u}{\partial \xi_p}$ — конормальная производная.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти в области D_e решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x) \in C^2_{B^{p-1}}(D_e) \cap C^2_{B^p}(D_e) \cap C^1(\overline{D_e}),$$

$$u(x) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0,$$

$$A[u]\big|_\Gamma = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma),$$

причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}\left(e^{-\rho_0}\right),$$

где $\rho_0^2 = \left|x'\right|^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\, x_p^{m+2}$.

Целью исследования является доказательство существования единственного решения поставленных краевых задач.

Решение уравнения (1) ищется в виде

$$V(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) Z(\xi, x) \xi^k_{p-1} d\Gamma, \tag{3}$$

где

$$Z(x, x_0) = \beta C_k \int\limits_0^\pi \left(C_\gamma \int\limits_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{K}_\nu\left(\lambda\rho_\varphi\right) \sin^{\gamma-1}\varphi\, d\varphi \right) \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi$$

— фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в произвольной точке x_0, $\mathrm{K}_\nu\left(\lambda\rho_\varphi\right)$ — функция Макдональда, $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2}$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$,
$\rho_\varphi^2 = |x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1_0}\cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2}(x_p^{m+2} + x_{p_0}^{m+2} - 2x_p^{\frac{m+2}{2}}\, x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}}\cos\varphi)$.

Исследованы предельные значения потенциала (3) и его нормальной производной на границе области. Используя их, а также краевое условие (2), относительно неизвестной плотности $\mu(\xi)$, составляем интегральные уравнения для внутренней и внешней граничных задач Неймана с ядром со слабой особенностью. Применяя к полученным уравнениям альтернативу Фредгольма, мы доказываем, что однородные интегральные уравнения, соответствующие неоднородным, не имеют не нулевых решений. Следовательно, неоднородные уранения, а вместе с тем и краевые задачи, однозначно разрешимы.

Таким образом, верна

Теорема. *Если Γ — поверхность Ляпунова и образует с плоскостями $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$ прямые углы, то внутренняя и внешняя краевые задачи Неймана имеют единственное решение при любых граничных данных из $C(\Gamma)$ и решение каждой можно представить в виде потенциала простого слоя.*

SOLUTION OF THE NEUMANN PROBLEM FOR A B-ELLIPTIC EQUATION WITH A NEGATIVE PARAMETER

N.A. Ibragimova, E.A. Utkina

In the article we consider the Neumann internal and external boundary value problems for one multidimensional degenerate B-elliptic equation with a negative parameter. We prove the unique solvability

of the boundary value problems by the method of potentials.

Keywords: multidimensional degenerating B-elliptic equation with a negative parameter, fundamental solution, Neumann boundary value problem, the method of potentials.

УДК 517.542

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

П.Н. Иваньшин[1]

1 *pivanshi@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе приведен метод построения дробно-полиномиальных конформных отображений единичного круга на области с угловыми точками.

Ключевые слова: конформное отображение, дробно-полиномиальная функция, сходимость.

В работе дан один вспомогательный метод построения приближенного конформного отображения единичного круга на односвязную область. Построенная здесь конструкция дополняет [1], [3]. Напомним, что в [1] авторы конструируют приближенное полиномиальное конформное отображение единичного круга D на некоторую односвязную область B. Метод построения приближенного конформного отображения кольца на двусвязную область см. в [2].

Главный результат заключается в том, что построенные при помощи непрерывных дробей (подобные, но не совпадающие с последовательностью дробно-полиномиальных функций [4], [5]) отображения приближают квадратный корень в комплексной правой полуплоскости.

Для приближения дробных степеней рассмотрим представление

$$z^{\frac{k}{N}} = z^{\frac{k-1}{N}} + \frac{z - z^{\frac{k-1}{N}}}{z^{\frac{N-k}{N}} + \ldots + z^{\frac{2}{N}} + z^{\frac{1}{N}} + 1}$$

Например, для $z^{1/3}$ получим для $f_1(z) = 1 + \frac{z-1}{z+1}$

$$f_n(z) = 1 + \frac{z-1}{\frac{z}{f_{n-1}(z)} + f_{n-1}(z) + 1}$$

Лемма. *Для $f_n(z)$ и z с $\mathrm{Re}[z] > 0$ выполнены следующие факты:*

1. $\mathrm{Re}[f_n(z)] > 0$

2. $\mathrm{Im}[f_n(z)]$ *имеет тот же знак, что и* $\mathrm{Im}[z]$.

3. Отношение $\frac{\mathrm{Im}[f_n(z)]}{\mathrm{Re}[f_n(z)]}$ *имеет тот же знак, что и* $\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}$, *но* $\left|\frac{\mathrm{Im}[f_n(z)]}{\mathrm{Re}[f_n(z)]}\right| < \left|\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right|$.

Теорема. *В правой комплексной полуплоскости нет точек, в которых производная $f_n(z)$ равна нулю.*

Утверждение. *Функции $f_n(z)$ сходятся к $z^{k/N}$ для* $\mathrm{Re}[z] > 0$, $|z| < 1$.

Литература

1. Shirokova E.A., Ivanshin P. N. *Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory* // Journal of Complex Analysis. – 2016. – V. 2016. – P. 1–8.